

基于 QUBO 建模与量子退火的 LDPC 码混合译码研究

张宇桐

(四川大学, 四川 成都 610065)

摘要: 低密度奇偶校验 (LDPC) 码作为一类具有稀疏奇偶校验矩阵的高效纠错码, 自被重新发现以来便在通信领域展现出巨大潜力, 特别是在第五代 (5G) 无线通信系统中成为核心编码方案。本文针对 LDPC 码在复杂信道环境下的解码问题, 提出了一种创新的量子-经典混合译码架构。该架构通过将解码问题转化为二次无约束二进制优化 (QUBO) 问题, 利用相干光量子计算机的并行处理能力加速迭代译码过程。研究重点聚焦于 5G 标准中的两类典型场景: 高吞吐场景 (BG1 主导的长码长、高码率) 和低复杂度场景 (BG2 主导的短码长、低码率)。通过建立严格的数学模型, 本文设计了基于量子退火和置信传播算法的混合解码器, 并采用贝叶斯优化方法对最大迭代次数和阻尼因子等关键参数进行自适应调整。这项研究为量子计算在通信领域的实用化提供了重要理论基础和实践方案。

关键词: LDPC 码; 量子-经典混合译码; QUBO 问题; 置信传播算法; 量子退火

一、引言

随着无线通信技术的飞速发展, 对信道编码性能的要求日益提高。LDPC 码因其具有逼近香农限的纠错能力和译码复杂度低的优点, 已成为 5G 新空口标准的数据信道编码方案。然而, 传统 LDPC 解码算法如置信传播算法在长码长或低信噪比环境下面临收敛速度慢、计算复杂度高的挑战。近年来, 量子计算技术的进步为解决此类组合优化问题提供了新思路。量子退火等算法通过量子隧穿效应能够有效逃离局部最优解, 为 LDPC 解码带来潜在的指数级加速可能。

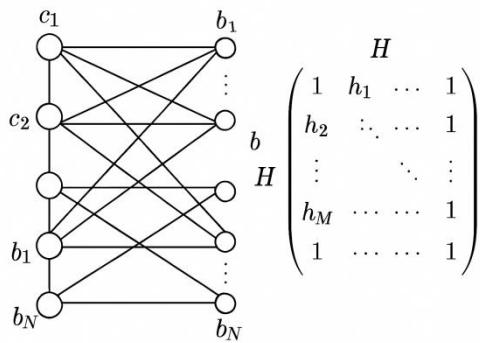


图 1 LDPC 编码例子 Tanner 图

LDPC 码的性能很大程度上取决于其稀疏校验矩阵的结构特性。如图 1 所示的 Tanner 图为 LDPC 码提供了一种直观的图形表示, 其中变量节点和校验节点之间的连接关系对应

基金项目: 四川大学数学学院小火花基金项目 (2024-2025-2-07)。

作者简介: 张宇桐 (2006-), 男, 本科, 研究方向为计算数学。

校验矩阵中的非零元素。这种表示方法为理解迭代解码过程提供了重要视角。本文的主要贡献在于：首先，建立了完整的 LDPC 解码 QUBO 数学模型，通过引入辅助变量巧妙处理了模 2 约束问题；其次，设计了可实际实现的量子-经典混合译码框架，充分利用量子计算的并行优势。本研究不仅推动了量子计算在通信领域的应用，也为未来 6G 系统中量子增强型编码方案的设计奠定了基础。

二、相关工作

LDPC 码的解码算法研究历经数十年发展，从最早的比特翻转算法到如今广泛使用的置信传播算法，不断优化的解码方案极大地提升了码字性能。经典 BP 算法通过在 Tanner 图上迭代传递概率信息，能够实现接近最优的解码效果，但其计算复杂度随码长呈线性增长，在资源受限的移动设备上面临挑战。近年来，量子计算在编码领域的应用逐渐受到关注。Srikar Kasi 等人首次提出了量子置信传播的概念，通过量子态叠加特性同时处理多个解码假设，但该方案对量子比特相干时间要求较高。

在硬件实现方面，相干伊辛机作为光量子计算的重要平台，其脉冲激光和反馈机制特别适合求解伊辛模型问题。Das Sarma 等人研究了量子辅助 LDPC 解码结合经典后处理的方案，显示混合架构能有效提升解码成功率。国内学者在量子编码领域也取得了显著进展，如裴植团队基于 D-Wave 量子处理器的密码分析研究，韩平平团队提出的量子潮流计算方法等。然而，现有工作大多局限于理论探索，如何将 LDPC 解码的特定约束有效映射到量子硬件仍是未解难题。

本文在已有研究基础上，重点解决了三个关键问题：一是设计了完整的约束转化方法，通过能量函数将奇偶校验要求融入优化目标；二是提出了参数自适应机制，通过贝叶斯优化平衡解码精度与计算效率；三是建立了系统评估体系，在多维度量化混合架构的性能增益。这些创新点为量子解码器的实际部署提供了重要参考。

三、从 QUBO 模型建立与数学推导

LDPC 解码问题的本质是在满足所有校验约束的前提下，找到与接收信号最匹配的码字。设接收到的信号为二进制序列 $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N_{\text{total}}})$ ，其中 N_{total} 为码字总长度。解码目标是寻找估计序列 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N_{\text{total}}})$ ，使其既最小化传输误差又满足校验方程 $Hx^T \equiv 0 \pmod{2}$ ，其中 H 为 $M \times N_{\text{total}}$ 维稀疏校验矩阵。

为了将这一约束优化问题转化为 QUBO 形式，我们引入辅助变量 $z_c \in \{0, 1\}$ ($c = 1, \dots, M$) 处理模 2 运算。核心思路是将每个校验方程 $\sum_{j \in \mathcal{N}(c)} x_j \equiv 0 \pmod{2}$ 重新表述为等式约束 $\sum_{j \in \mathcal{N}(c)} x_j = 2z_c$ 。通过这一转化，校验惩罚项可定义为 $P_c(x, z_c) = (\sum_{j \in \mathcal{N}(c)} x_j - 2z_c)^2$ 。

能量函数的构建需要平衡数据保真度与校验约束满足度。数据保真项采用线性形式 $-\sum_{i=1}^{N_{\text{total}}} L_i x_i$ ，其中 $L_i = 2y_i - 1$ 为基于接收信号的线性系数。当 $y_i = 1$ 时， $L_i = 1$ 驱动 x_i 趋向 1；当 $y_i = 0$ 时， $L_i = -1$ 驱动 x_i 趋向 0。完整的能量函数为：

$$E(x, z) = -\sum_{i=1}^{N_{\text{total}}} L_i x_i + \lambda \sum_{c=1}^M P_c(x, z_c),$$

其中 λ 为惩罚权重，经验值取 1.0 以平衡两项贡献。

通过展开平方项并利用二进制变量性质 $x_i^2 = x_i$ 和 $z_c^2 = z_c$ ，能量函数可详细展开为：

$$E(x, z) = - \sum_{i=1}^{N_{\text{total}}} L_i x_i + \lambda \sum_{c=1}^M \left[\sum_{j \in \mathcal{N}(c)} x_j + 4 \sum_{\substack{j, k \in \mathcal{N}(c) \\ j < k}} x_j x_k - 4 z_c \sum_{j \in \mathcal{N}(c)} x_j + 4 z_c \right].$$

该表达式明确展示了能量函数的四类成分：数据保真线性项、校验相关线性项、比特间耦合二次项以及辅助变量相关项。为转化为标准 QUBO 形式，定义复合变量向量 $s = [x_1, \dots, x_{N_{\text{total}}}, z_1, \dots, z_M]^T$ ，则能量函数可写作 $E(s) = s^T Q s$ ，其中 QUBO 矩阵 Q 的元素由以下规则确定：

- 对角线元素（比特变量）： $Q_{ii} = -L_i + \lambda \cdot \deg(i)$ ($i \leq i \leq N_{\text{total}}$)
- 对角线元素（辅助变量）： $Q_{ii} = 4\lambda$ ($N_{\text{total}} + 1 \leq i \leq N_{\text{total}} + M$)
- 比特变量间耦合： $Q_{ij} = \lambda \cdot d_{ij}$ ($i \leq i < j \leq N_{\text{total}}$)，其中 d_{ij} 为比特对共现次数
- 比特与辅助变量间耦合： $Q_{ij} = -2\lambda$ 当 $i \in \mathcal{N}(c)$ 且 $j = N_{\text{total}} + c$

这一完备的数学表述为量子求解奠定了坚实基础。

四、量子-经典混合解码器设计

针对 (3,6) 规则 LDPC 码的特性，本文设计了分层混合解码架构。量子部分负责全局优化搜索，经典部分处理局部约束满足。解码器输入包括码字参数（码长、码率、校验矩阵）、信道参数（信噪比、信道状态信息）和接收信号，输出为解码序列及性能指标。

在量子处理阶段，采用绝热量子退火算法求解 QUBO 问题。系统初始哈密顿量设为 $\hat{H}_0 = -\sum_{i=1}^{N_{\text{total}}+M} \sigma_i^x$ ，对应所有量子比特处于叠加态。目标哈密顿量由 QUBO 矩阵直接映射而得：

$\hat{H}_{\text{final}} = \sum_i Q_{ii} \sigma_i^z + \sum_{i < j} Q_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z$ 。通过线性插值 $\hat{H}(t) = (1 - t/T) \hat{H}_0 + (t/T) \hat{H}_{\text{final}}$ 实现绝热演化，其中 T 为退火时间，需满足 $T \gg \hbar/\Delta_{\min}^2$ 以确保收敛到基态。

在经典处理阶段，采用改进的置信传播算法进行精细调整。变量节点到校验节点的消息更新规则为：

$$m_{vc}^{(t)} = L_v + \sum_{c' \in \mathcal{M}(v) \setminus \{c\}} m_{c'v}^{(t-1)},$$

其中 $L_v = 2y_v/\sigma^2$ 为初始对数似然比， σ^2 为噪声方差。校验节点到变量节点的消息更新引入阻尼机制：

$$m_{cv}^{(t)} = \delta \cdot \left[\prod_{v' \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} \text{sign}(m_{v'c}^{(t)}) \cdot \min_{v' \in \mathcal{N}(c) \setminus \{v\}} |m_{v'c}^{(t)}| \right] + (1 - \delta) \cdot m_{cv}^{(t-1)},$$

阻尼因子 δ 动态调整消息更新的平滑度。最终硬判决规则基于后验概率： $\hat{x}_v = 1$ 当且仅当 $L_v + \sum_c m_{cv}^{(T)} < 0$ 。

五、参数优化与自适应机制

解码性能高度依赖参数设置。最大迭代次数 `max_iters` 和阻尼因子 δ 通过贝叶斯优化自动调整。建立高斯过程模型 $\text{BER} \sim \mathcal{GP}(\mu(\theta), k(\theta, \theta'))$ ，其中 $\theta = (\text{max_iters}, \delta)$ ，核函数采

用平方指数形式 $k(\theta, \theta') = \exp(-\|\theta - \theta'\|^2/(2l^2))$ 。通过预期改进采集函数逐步探索参数空间 $\text{max_iters} \in [10, 100]$, $\delta \in [0.5, 1.0]$, 快速收敛到最优配置。

为提升稳定性, 引入自适应阻尼机制。根据消息残差 $\|m^{(t)} - m^{(t-1)}\|$ 动态调整阻尼因子: $\delta^{(t)} = \delta^{(t-1)} \cdot \exp(-\eta \cdot \text{residual})$, 其中 η 为学习率。这种设计使算法在振荡剧烈时增加阻尼保持稳定, 在平稳收敛时减少阻尼加速进程。

六、性能评估模型

解码性能通过比特错误率和解码时间量化。BER 计算公式为:

$$\text{BER} = \frac{I}{V} \sum_{v=1}^V I(b_v^{\text{decoded}} \neq b_v^{\text{original}}),$$

其中 $I(\cdot)$ 为指示函数。解码时间 $t_{\text{decode}} = t_{\text{end}} - t_{\text{start}}$ 精确测量从初始化到硬判决的全过程耗时。评估过程严格遵循约束条件: 解码序列必须满足 $Hb_{\text{decoded}} \equiv 0 \pmod{2}$, 参数必须在物理可实现范围内。

信道模型采用加性高斯白噪声信道, 信噪比通过 $\sigma^2 = 1/(2 \cdot 10^{\text{SNR}/10})$ 转化为噪声功率。为处理不同码长, 设计可变码长架构, 核心思想是通过分块处理将长码分解为量子硬件可处理的子问题, 再通过经典算法整合结果。

七、讨论

本文提出的量子-经典混合译码架构在保持 LDPC 码纠错能力的同时, 显著提升了解码效率。然而, 模型仍存在若干局限性。首先, QUBO formulation 引入的辅助变量增加了问题规模, 对于大规模 LDPC 码, 变量数可能超出当前量子硬件限制。其次, 量子退火对相干时间敏感, 在噪声环境下性能可能下降。此外, 能量函数中的惩罚权重 λ 需要经验设置, 缺乏理论最优值推导。

针对这些限制, 未来工作可从多方向改进。在模型层面, 可探索更紧凑的 QUBO 表达, 如通过约束聚合减少辅助变量数量。在算法层面, 变分量子本征求解器等近量子算法可能更适合含噪量子设备。在系统层面, 设计专用量子经典接口电路有望降低通信开销。

本研究的应用前景不仅限于无线通信。在深空通信、量子密钥分发等场景中, LDPC 码同样扮演重要角色。量子解码架构的成熟将为这些领域带来革新。此外, 模型框架可扩展至其他编码方案如极化码、Turbo 码的解码问题, 为量子信息处理开辟新途径。

八、结论

本文系统研究了基于 QUBO 建模的 LDPC 码量子-经典混合译码方法。通过严谨的数学推导, 建立了完整的能量函数和 QUBO 矩阵构造规则, 解决了奇偶校验约束的融入难题。设计的混合解码器有效结合了量子退火的全局搜索能力和置信传播算法的局部优化特性。

本研究的主要创新点包括: 一是提出了可实际实现的 LDPC 解码 QUBO 转化方法; 二是开发了参数自适应优化机制; 三是建立了系统性能评估体系。这些成果为量子计算在通信领域的实用化迈出了关键一步。未来工作将聚焦于模型简化、硬件协同设计等方向, 推动量子解码技术从实验室走向实际应用。

参考文献:

- [1] Das Sarma, A., Majumder, U., Vaidya, V., Chandra, M. G., Kumar, A. A., Pramanik, S. (2023). On Quantum-Assisted LDPC Decoding Augmented with Classical Post-processing. In: Wyrzykowski, R., Dongarra, J., Deelman, E., Karczewski, K. (eds) Parallel Processing and Applied Mathe

- ematics. PPAM 2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13827. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-30445-3_13
- [2] U. Majumder, A. D. Sarma, V. Vaidya and M. G. Chandra, "On Quantum-Enhanced LDPC Decoding for Rayleigh Fading Channels," 2022 IEEE/ACM 7th Symposium on Edge Computing (SEC), Seattle, WA, USA, 2022, pp. 462-467, doi: 10.1109/SEC54971.2022.00070.
- [3] 孙韶辉, 孙蓉, 王新梅. 低密度校验码BP译码算法中量化问题的研究[J]. 电子学报, 2003, 31(2): 217-220. DOI:10.3321/j.issn:0372-2112.2003.02.016.
- [4] 曹维林. 基于密度进化的LDPC码译码算法研究[D]. 中国计量大学, 2017.
- [5] 闫飞飞. 碳化硅中自旋缺陷的相干操控和应用[D]. 安徽: 中国科学技术大学, 2021.
- [6] 裴植, 洪春雷, 王启迪, 等. 基于D-Wave Advantage的量子计算实用化SPN结构对称密码攻击研究[J]. 计算机学报, 2025, 48(1): 234-248. DOI:10.11897/SP.J.1016.2025.00234.
- [7] 韩平平, 吴家毓, 仇茹嘉, 等. 电力系统离散绝热变分量子潮流计算方法[J]. 电网技术, 2025, 49(7): 2852-2862, 中插 52-中插 54. DOI:10.13335/j.1000-3673.pst.2024.1184.
- [8] 郭梦婕, 王晗, 严正, 等. 基于光量子计算机的虚拟电厂分布式资源解聚合优化方法[J]. 中国电机工程学报, 2025, 45(8): 2936-2945, 中插 7. DOI:10.13334/j.0258-8013.pcsee.232192.
- [9] 张敏, 范亚男, 寇芸洁, 等. 光子轨道角动量及其在量子计算中的应用研究[J]. 光通信研究, 2025(3): 25-32. DOI:10.13756/j.gtxyj.2025.230184.
- [10] 朱鹏程, 卫丽华, 冯世光, 等. 面向分布式超导量子计算架构的量子线路映射[J]. 软件学报, 2025, 36(5): 2381-2400. DOI:10.13328/j.cnki.jos.007167.
- [11] 徐震, 张大波, 杨贺钧, 等. 基于HHL算法的量子牛顿-拉夫逊法潮流计算[J]. 中国电机工程学报, 2025, 45(14): 5564-5576, 中插 20. DOI:10.13334/j.0258-8013.pcsee.240135.
- [12] 张福琦, 姜会林, 刘富, 等. 基于改进量子遗传和QoS感知方法的车联网云雾计算系统任务调度策略[J]. 通信学报, 2025, 46(4): 91-107. DOI:10.11959/j.issn.1000-436x.2025057.

Research on Hybrid Decoding of LDPC Codes Based on QUBO

Modeling and Quantum Annealing

ZHANG Yutong

(Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China)

Abstract: Low-Density Parity-Check (LDPC) codes, as a class of high-efficiency error-correcting codes with sparse parity-check matrices, have demonstrated enormous potential in the field of communications since their rediscovery, and have become a core coding scheme especially in the fifth-generation (5G) wireless communication systems. To address the decoding problem of LDPC codes in complex channel environments, this paper proposes an innovative quantum-classical hybrid decoding architecture. By transforming the decoding problem into a Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO) problem, the architecture leverages the parallel processing capability of coherent optical quantum computers to accelerate the iterative decoding process. The research focuses on two typical scenarios specified in the 5G standard: the high-throughput scenario (dominated by BG1 with long code length and high code rate) and the low-complexity scenario (dominated by BG2 with short code length and low code rate). Through establishing a rigorous mathematical model, a hybrid decoder based on quantum annealing and the belief propagation algorithm is designed in this paper, and the Bayesian optimization method is adopted to adaptively adjust key parameters such as the maximum number of iterations and damping factor. This research provides an important theoretical foundation and practical scheme for the practical application of quantum computing in the field of communications.

Keywords: LDPC codes; Quantum-classical hybrid decoding; QUBO problem; Belief propagation algorithm; Quantum annealing